文字法によるブール関数の最小化について

著者	宮腰 秀勝
雑誌名	北海道女子短期大学研究紀要
巻	21
ページ	113-124
発行年	1987
URL	http://id.nii.ac.jp/1136/00001792/

文字法によるブール関数の最小化について

A Literal Code Method for Minimizing Boolean Functions

宮　腰　秀　勝

Hidekatsu　Miyakoshi

Abstract

This paper describes a method for deriving minimal sums of Boolean functions. The method, unlike most others, does not assign numerical values to minterms. Instead it deals with minterms and terms directly by means of literals. The use of literals lends itself to an algebraic approach. The speed and efficiency of the calculations make the method suitable for handling functions of a relatively high number of literals.

Index Terms :

algebraic approach, Boolean functions, domination, essential PIs (EPIs), literal codes, minimal sums, prime implicants (PIs), redundant PIs (RPIs), secondary EPIs (SEC EPIs), subsumption

I　はじめに

この論文の目的はブール関数簡単化の方法として文字による最小化の方法を示すことにある。ブール関数の最小和を得る従来の方法は二つに分類される。すなわち，クインーマクルスキーによって得られた初期の方法は，最小和を発生させるのに関数の凡ゆる項や主項を計算した。(文献〔1〕,〔2〕,〔4〕参照) 最近の方法は撰択的に巧妙に項や主項の一部を取扱う故に，より迅速に効果的になってきた。(文献〔3〕,〔7〕,〔8〕参照) この論文の方法も勿論後者に属する。

さらに，これまでの方法は，いづれも数値を最小項に割振ることにより算術的な方法（アプローチ）がとられてきた。しかしながら最小項の文字（変数）による表現が最小和を得る代数的アプローチにより処理可能であると云うことが分ってきた。さらに，算術的アプローチにおいては n 変数の最小項は 2^n 個である故に変数の増大に伴ない最小項の項数は指数的に飛躍的に増加するが，代数的アプローチにおいては原関数の m 個の最小項が与えられるとき mn 個の文字を扱えば良いことになり多変数を取扱う場合に大変な相違が出てくる。

また，代数的アプローチは今日一般的に使用されているコンピュータ言語（コンパイラ言語）の利用に特に適している。後述の章におけるコンピュータによる研究の結果は，処理スピード，

効率，そして多変数関数の処理能力における代数的アプローチの有効性を示している。

最小和に含まれる主項は通例は原関数のごく一部分である。最小和を得る最も効果的な方法は最小和に含まれる主項を直接求めることである。最小和に含まれる主項には二つの型がある。一つは必須項であり，もう一つは二次必須項である。文字法における大部分の処理プロセスは必須項と二次必須項の発生に集中している故に，この方法は必須項法と呼ばれても良い。文字法はまた，可能なかぎりのダブった計算を避けることにより，すなわち同じ項や主項をくり返し発生させることを避けて計算スピードや効果を上げている。

この論文は７つの部章に分けられる。Ⅱは項の発生を述べ，Ⅲは主項の発生を取扱い，Ⅳは必須項，冗長主項と二次必須項全般に亘って論及し，Ⅴは冗長最小項〔“Don’ t cares”〕を取上げ，Ⅵはサイクリツク関数の処理を述べ，Ⅶはコンピュータ処理によるデータを含めた結論を行っている。

Ⅱ　項　の　発　生

最初に本論文では与えられた関数は最小項の和の形で表わされると仮定する。最小項とは与えられた文字（変数）すべてを持つ項である。このような最小項の和はブール関数の最小和を求める代数的アプローチの出発点となることは当然のことである。このアプローチでは，どんな項もｎ変数の最小項のｋ個の文字に数値１を与えることにより（ここに $k < n$ ）発生させることができる。しかしながら，そのようにして生じた項は原関数の項であることもあるが，そうでないこともある。この項（TERM）が，もしも原関数の最小項のみから成立っておれば，この関数の項（IMPLICANT）である。従って，この項の最小項が原関数の最小項であるかどうかを調べる必要がある。次の定理は，ある項が与えられた関数に含まれるかどうかを調査する便利な方法を与えるために開発された。その前に，公理として次の補助定理をのべておく。

補助定理：　１つの最小項がある項に従属するかを見るためには，この２つの項の積を作ってそれが零であるかどうかを見れば良い。換言すれば，これらの項が互いに共軛な文字を持つときは，この最小項はこの項に含まれず，さもない時はこの項に含まれる。(証明省略)

定理　１：　Ｆをｎ変数のブール関数とする。またｔをＦの最小項 m_j のｎ個の変数の内，ｋ個に数値１を与えることによって生じた項であるとする。もしも t とＦの積 $t \cdot F$ が 2^k 個のＦの最小項からなり，またその場合のみに限るならばｔはＦの項である。

証明：　ＸをＦのｎ変数の組（セット）とする。そして $X=\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n\}=\{A\ B\}$ とせよ。ここでＡはｔ項の変数の組であり，Ｂは数値１を与えられたｋ個の変数の組であるとする。すると最小項 m_j と項ｔは，それぞれ $m_j(A, B)$ と $t(A)$ として表わされる。また $\sum_{i=0}^{2^k-1} R_i(B)$ は変数Ｂの組の 2^k 個の項の和を示す。勿論 $\sum_{i=0}^{2^k-1} R_i(B)=1$ である。

すると $t(A)=t(A)\cdot 1=t(A)\sum_{i=0}^{2^k-1} R_i(B)=\sum_{i=0}^{2^k-1} t(A)\cdot R_i(B)=\sum_{i=0}^{2^k-1} M_i(A, B)$ ここで $M_i(A, B)=t(A)\cdot R_i(B)$ であり $R_i(B)$ が独立である故に独立である。$t(A)$ と $R_i(B)$ はＡとＢの全変数の積であるから，$M_i(A, B)$ はＸの全文字の積となって

変数Xの組の最小項であるが，それが必然的にFの最小項となるわけではない。Fの最小項を2種類に分けて，最小項$\sum_{i=0}^{2^k-1} M_i$（A，B）に属するものと，属しないものとに分ける。すなわち　$F(A, B)=\sum_{i=0}^{q} M_i(A, B)+\sum m_j(A, B)$　ここで$q \leq 2^k-1$

さらに$t(A) \cdot F(A, B)=t(A) \cdot \sum_{i=0}^{q} M_i(A, B)=\sum_{i=0}^{q} M_i(A, B)$

もし$q=2^k-1$ならば2^k個のM_i（A，B）はFの最小項であり，tに従属する。これはt（A）に従属する最小項M_i（A，B）はFの最小項であり，$q=2^k-1$でtとFの積t・Fは2^k個の最小項M_i（A，B）から成立つ。

次の例題は，この定理の適用例を示すためのものである。

例題1：　F（V，W，X，Y，Z）＝（0，1，3，4，5，6，7，11，16，17，24，25，27）

原関数Fの最小項は印刷の簡潔さと読者の便利のために数値で表現されているが，実際には最小項は文字法で取扱われていることを断っておく。ある最小項から一文字を抜いた項，例えば，文字法で$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$である最小項0から1字づつ，$\overline{V}$，$\overline{W}$，$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$を抜いた$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$の5項を求よう。これは定理1のK＝1の場合で，定理1によりこれらの式がFの項であるかを決定する。ゆえに各項が2^1個のFの最小項からなっておればFの項である。　$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$・Fを作ると$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$は最小項0と16よりなり，同様に$\overline{V}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$は最小項0のみで，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$は0と4，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Z}$は0のみで，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$は0と1とからなる。ゆえに$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$はFの項であるが$\overline{V}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$と$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Z}$はFの項ではない。もしも項tが定理1によりFの項であると分れば，最小項mは項tを発生すると云われる。故にこの例題では最小項0（$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$）は項$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$を発生するが$\overline{V}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Z}$は発生しない。

Ⅲ　主 項 の 発 生

ここでは主項（PI）発生の過程をのべる。過程の第1段階はn変数の最小項から1変数を抜くことによって項を発生させることである。次の段階は包含の過程であり，この過程を遂行するために次の定理が開発された。

定理　2：　n変数の原関数Fに従属する最小項m_iから生じた項の一組を$I=\{I_1, I_2, \ldots\ldots, I_r\}$とする。またIは次の性質を有するものとする。

① 各項は$n-k$個以上の変数からなるものとする。ここでkは数値1を割当られた文字の数である。

② Fの最小項m_iは$n-k$以上の文字を有する項に従属しない。

③ T_{ab}はセットIにおける項I_aとI_bに共通な文字から成立つ項である。

もしもすべての$j \neq a$に対してFの項であるT_{aj}が存在しなければI_aはFの主項である。

証明：　I_aがFのPIでないと仮定する。すると$\dot{X}s=Xs$又は$\overline{Xs}$であるような文字$\dot{X}s$に

対してI_aを包含し$I_a = \dot{X}s \cdot T$であるようなn－k－1文字の項Tが存在する。

$T = \dot{X}s \cdot T + \overline{\dot{X}}s \cdot T$であることに注意し，次に$J = \overline{\dot{X}}s \cdot T$とすると$T = I_a + J$となり，$I_a$とJとは共通にTの文字をもつことになる。しかしながら，仮定に従えばJは最小項m_iから生じた項のセットIには属していない。定理1によって$F \cdot I_a$は2^k個のFの最小項からなり，$F \cdot T$は正確には$2^{k+1} = 2^k + 2^k$個のFの最小項を持つ。ゆえに$F \cdot J$は2^k個のFの最小項をもつこととなり，これは定理1によりJがIに属することを意味し仮定に反する。この矛盾を解決するためにはI_aはFのPIでなければならない。

定理2によるPIの発生例を次の例題で示す。

例題2：　Fは例題1の関数を用いる。

$$F(V, W, X, Y, Z) = (0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17, 24, 25, 27)$$

例題1に示したごとく，最小項$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}(0)$は項$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$を生ずる。次に$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$と$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$とから共通な文字をとって項$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}$を作る。(今後，これを$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \rightarrow \overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}$のように書くことにする。) 同様に$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \rightarrow \overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$，$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \rightarrow \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$である。項$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}$は最小項0，1，4，5により従属され，また項$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$は最小項0，1，16，17に従属されるが$\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$は最小項0，4，16に従属される。$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}$と$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$は各項に従属する最小項数が$2^2 = 4$であるから定理1のK＝2の場合によりFの項であるが，$\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$は従属する最小項数が$3 \neq 2^2$であるためFの項ではない。また$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y} + \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y} \rightarrow \overline{W}\,\overline{Y}$として項$\overline{W}\,\overline{Y}$が生ずるが$\overline{W}\,\overline{Y}$に従属するFの最小項数は6で$6 \neq 2^3$であるゆえ，これまたFの項ではない。故に$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}$と$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$が定理2により最小項$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$（0）から生じたPIである。(今後，これを　$\overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}(0) \rightarrow \overline{V}\,\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \rightarrow \overline{V}\,\overline{W}\,\overline{Y} + \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}$のように示す。)

Ⅳ　必須項，冗長主項及び二次必須項の発生

必須項〔essential prime implicant〕(EPI)とは，その項のみに従属して他のいづれのPIにも従属しない最小項をもつPIである。そのような最小項は必須最小項といわれる。原関数を表わす主項和は，その関数のすべてのEPIを含む時にのみ存在し得る。EPIは前章にのべた過程によっても発生するが，特別なそして更に便利なEPI発生のプロセスが開発されている。次の補助定理と定理は，EPI発生のための代数的プロセスを開発するのに大変重要である。

補助定理　1：　m_iをn変数の最小項とする。もしもm_iがX_jを抜いたn－1文字の項を発生しないならばm_iが従属する各PIは文字X_jを包含する。

証明：　もしm_iが文字Xjを抜いたn－1字の項T_kを発生しないならば，T_kから発生したX_jを含まないPIは存在し得ない。そしてすべての他の発生したn－1字の項は文字X_jを

もつ。それゆえ，これ等の項から発生したPIはX_jがすべての項に共通であるから定理2により文字X_jを持たねばならぬ。そこでm_iに従属されるすべてのPIはX_jを含むことになる。もしもn－1字の項からいかなるPIも生じなければ，このn－1字の項自身がX_jを共通な文字としてもつPIである。同様に，もしm_iが発生しなければm_i自身がXjをもつPIである。

定理　3：　m_iをn文字の最小項とする。Xj，X_k，……Xrをm_iが発生しないn－1文字の項から欠けている文字とする。もしm_iがP＝X_jX_k……Xrという項を発生するならば，PがEPIであり，もしm_iがPを発生しなければ，m_iは必須最小項ではない。

証明：　m_iは文字X_j，X_k……Xrの抜けたn－1文字の項を発生しないから，これらのすべての文字は発生した他項に含まれなければならぬ。最初に二つの些少な場合を考慮する。最初の場合はX_j，X_k，……，Xrが全部でn文字の時で，この場合はm_iがこれにより従属される唯一の項Pである。したがってEPIと必須最小項の二役を兼ねる。第2の場合はn－1文字のX_j，X_k，……，Xrの時である。この時はm_iにより生ずる唯一の項がPであり，これはPがEPIでありm_iが必須最小項であることを意味する。残りはX_j，X_k，……，X_rが精々n－2文字又以下であるとする。m_iがPを生じたと仮定する。するとPはFの項であり，すべての発生した項のうち最小の数の文字を持つ故にPIであり，かつ又m_iにより発生した唯一のPIであるからPはEPIでありm_iは必須最小項である。次にm_iがPを発生しないと仮定する。補助定理1により，m_iはPの各文字を含むPIに従属しなければならぬ。そのPIをQ（Q＝P・Q）とする。Pの文字の外にQは少くともm_iから生じたn－1文字の項I_aから抜けている1文字，例えばXaを含んでいる。QがEPIであると仮定するとm_iによって生じたすべての他の項はQを含まねばならない。しかしI_aはX_aを含まない故に矛盾する。この矛盾を解決する唯一の方法はQがEPIでなくて，m_iが必須最小項でないことを認めることである。

EPIに従属する最小項は補助定理によってもたらされる特殊な性質を持つ。

補助定理　2：　EPIに従属する最小項は，一度考慮されたならば取除かれたものとして留保されてよい。

証明：　最小項m_iが一つのPIのE_iだけに従属すると仮定する。するとE_iはEPIである。m_jをE_iに従属するm_iと別の最小項であるとする。もしもm_jが別のEPI例えばE_kに従属するとすれば，E_kだけに従属する別な最小項が存在する。したがってE_kはm_jに無関係に発生し得る。それゆえにEPIに従属する全最小項を，それ以後の考察から取除いてもEPI発生の妨げにはならない。

EPIに従属する最小項のこの性質は計算上のスピードと能率を増進するのに役立つ。取除かれた最小項は他のPIを発生するのに再び用いられることもあるし，用いられないこともある。その意味でこれらの最小項は“Don't care”最小項のような効果をもつことになる。

次の例題は定理3がEPI発生に適用される状況を示している。

例題3：　F（V，W，X，Y，Z）＝（1，4，5，7，8，9，11，13，14，15，18， 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30）

最初，定理３を用いて必須最小項を捜すと $\bar{V}\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z$（１）が必須最小項であることが分る。この最小項は $\bar{V}$，$\bar{Y}$，Ｚが抜けた $\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z$，$\bar{V}\bar{W}\bar{X}Z$，$\bar{V}\bar{W}\bar{X}\bar{Y}$ を発生しない。そして $\bar{V}\bar{Y}Z$ は最小項１から発生する故に EPI である。$\bar{V}\bar{Y}Z$ に従属する他の３個の最小項５，９，13は最小項１と共に除いて留保する。同様に $\bar{V}\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}$（４），$\bar{V}W\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$（８），$V\bar{W}\bar{X}Y\bar{Z}$（18）が必須最小項であることが分る。これ等の最小項から得られる EPI は $\bar{W}X\bar{Y}$, $W\bar{X}\bar{Y}$, $V\bar{X}Y$ である。この４個の EPI に従属する最小項は取除いて留保し D＝（１，４，５，８，９，13，18，19，20，21，24，25，26，27）とする。最小項１，４，８，18は次の最小項群（１，５，９，13），（４，20，21），（８，24，25），（18，19，26，27）を留保した。

冗長な主項〔redundant PI〕（RPI）は各々他の主項に分散して含まれている PI である。それ故に原関数と等価の主項和は RPI なしでも作られる。一般に PI には２種類がある。即ち EPI と EPI でない PI である。この EPI でない PI が RPI であり，２個又は２個以上の RPI が１個の最小項から発生する。RPI を発生するプロセスは前章で述べられている。例題３で，４個の EPI が発生し EPI に従属する14の最小項が留保された。残りの留保されない最小項は G＝（７，11，14，15，23，28，29，30）である。そして原関数の RPI は G の最小項から発生する。例えば，$\bar{V}\bar{W}XYZ$（７）→ $\bar{W}XYZ + \bar{V}XYZ + \bar{V}\bar{W}XZ \rightarrow \bar{V}XZ + \bar{W}XZ$ である。このプロセスを継続すると12個の RPI がセット G から発生する。第１表は例題３の EPI と RPI を示している。丸印のついた最小項と PI は必須であることを示し，線で消去した最小項は留保したセット D に属する最小項であることを示す。丸印のない最小項は RPI を発生するセット G の最小項を示し，線で消去した RPI は表中でダブって出現するので消去した RPI を示す。もしもセット G の残り最小項のすべてを包含する最小個数の RPI が撰ばれるならば，これらの RPI の和は EPI と共に F の全最小項を包含する。このようにして撰ばれた最小個数の RPI は二次必須項〔secondary EPIs〕（SEC EPIs）と呼ばれる。

次に支配（domination）と呼ばれる項の性質を用いて SEC EPI の撰択を論ずる。

表１　例題３の最小項と発生主項の表

最　小　項	発　生　主　項	最　小　項	発　生　主　項
○$\bar{V}\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z$（１）	○$\bar{V}\bar{Y}Z$	~~$V\bar{W}\bar{X}YZ$（19）~~	
○$\bar{V}\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}$（４）	○$\bar{W}X\bar{Y}$	~~$V\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}$（20）~~	
~~$\bar{V}\bar{W}X\bar{Y}Z$（５）~~		~~$V\bar{W}X\bar{Y}Z$（21）~~	
$\bar{V}\bar{W}XYZ$（７）	$\bar{V}XZ$　$\bar{W}XZ$	$V\bar{W}XYZ$（23）	$V\bar{W}YZ$　~~$\bar{W}XZ$~~
○$\bar{V}W\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$（８）	○$W\bar{X}\bar{Y}$	~~$VW\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$（24）~~	
~~$\bar{V}W\bar{X}\bar{Y}Z$（９）~~		~~$VW\bar{X}\bar{Y}Z$（25）~~	
$\bar{V}W\bar{X}YZ$（11）	$\bar{V}WZ$　$W\bar{X}Z$	~~$VW\bar{X}Y\bar{Z}$（26）~~	
~~$\bar{V}WX\bar{Y}Z$（13）~~		~~$VW\bar{X}YZ$（27）~~	
$\bar{V}WXY\bar{Z}$（14）	$\bar{V}WXY$　$WXY\bar{Z}$	$VWX\bar{Y}\bar{Z}$（28）	$VW\bar{Y}$　$VX\bar{Y}$　$VW\bar{Z}$
$\bar{V}WXYZ$（15）	~~$\bar{V}WXY$~~　~~$\bar{V}XZ$~~　~~$\bar{V}WZ$~~	$VWX\bar{Y}Z$（29）	~~$VW\bar{Y}$~~　~~$VX\bar{Y}$~~　$W\bar{Y}Z$　$X\bar{Y}Z$
○$V\bar{W}\bar{X}Y\bar{Z}$（18）	○$V\bar{X}Y$	$VWXY\bar{Z}$（30）	~~$VW\bar{Z}$~~　~~$WXY\bar{Z}$~~

2つの項 J と K を考える。もしも（そしてその場合に限るならば） J・m_i = m_i であるような留保されない最小項 m_i に対し K・m_i = m_i であるような K があるならば K は J を支配するという。

SEC EPI を撰ぶ際の支配の使い方は例 3 を継続して示すことにする。

第 1 表の12個の RPI は次の通りである。

R 1　$\overline{V}XZ$（$\underline{5}$，7，$\underline{13}$，15），
R 2　$\overline{W}XZ$（$\underline{5}$，7，$\underline{21}$，23），
R 3　$\overline{V}WZ$（$\underline{9}$，11，$\underline{13}$，15），
R 4　$W\overline{X}Z$（$\underline{9}$，11，$\underline{25}$，$\underline{27}$），
R 5　$\overline{V}WXY$（14，15），
R 6　$WXY\overline{Z}$（14，30），
R 7　$VW\overline{Y}$（$\underline{24}$，$\underline{25}$，28，29）
R 8　$VX\overline{Y}$（$\underline{20}$，$\underline{21}$，28，29）
R 9　$VW\overline{Z}$（$\underline{24}$，$\underline{26}$，28，30）
R10　$V\overline{W}YZ$（$\underline{19}$，23）
R11　$W\overline{Y}Z$（$\underline{9}$，$\underline{13}$，$\underline{25}$，29）
R12　$X\overline{Y}Z$（$\underline{5}$，$\underline{13}$，$\underline{21}$，29）

上の RPI において， EPI 撰択の際に使用されて留保されたセット D の最小項には，その数値に下線を施しておく。(例えば R 1 の 5 と13のように)

SEC EPI を撰ぶに際しては G の最小項だけが包含される必要があるので，その G の最小項が他の RPI に支配されるような RPI が破棄される。この例では R 4 の11と R 10の23は R 3 と R 2 により支配される。加えて R 11と R 12の29が R 8 により支配される。それゆえに，R 4， R 10， R 11， R 12が破棄される。又， R 7 は R 8 により支配されると考えられる。これはどちらか片方が破棄されればよいから，今， R 7 を破棄する。また， G の最小項23, 11, 29は R 2， R 3， R 8 のみに従属するからこれらの RPI は SEC　EPI である。これらの SEC　EPI に属する G の最小項 7，11，15，23，28，29は留保されセット D に組み入れられる。セット D の最小項は今や G の最小項14と30以外のすべての F の最小項を包含する。この最小項14と30の新らしい G のセットを G 1 とする。同様な次のプロセスが G 1 について行われる。最小項14と30は R 6 に含まれるから R 6 はこれら最小項のどちらかを含むすべての他の RPI を支配する。したがって残るすべての RPI は破棄される。 R 6 の撰択によってすべての F の最小項は留保された。 4 個の F の EPI と 4 個の SEC　EPI は次の最小和を形成する。

$$F = \overline{V}\,\overline{Y}Z + \overline{W}X\overline{Y} + W\overline{X}\,\overline{Y} + V\overline{X}Y + \overline{W}XZ + \overline{V}WZ + WXY\overline{Z} + \begin{cases} VX\overline{Y} \\ VW\overline{Y} \end{cases}$$

ここで括弧は R 8 $VX\overline{Y}$ か R 7 $VW\overline{Y}$ のどちらかを SEC　EPI として撰ぶことを示す。

V　“don’t care” 最小項を持つ関数の取扱い

冗長な最小項（“don’t care” minterms）が存在する時の PI 発生の方法を考える。冗長な最小項を取扱う方法はこれらがない時とほとんど同じである。{ F_d }を冗長な最小項のセットとする。{ F_d }を原関数 F に加えて $F_\sigma = F + \{F_d\}$とする。前章の定理を F_σ に適用して PI を発生する。{ F_d }から PI を発生する必要はない。冗長最小項は原関数から EPI を発生させることに役立つがそれら自身が必須最小項になることはない。

例題4：　F（A，B，C，D）=（2，3，10，11，12，13，14，15）

$\{F_d\}$は冗長最小項のセットであって$\{F_d\}$=（1，6，7）であるとする。

F_σ=（2，3，10，11，12，13，14，15）+（1，6，7）

最初にF_σのEPIを発生させる。$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$（2）→C，$AB\overline{C}\,\overline{D}$（12）→AB

冗長な最小項6と7がCに従属していることに注目する。F_σの全最小項は冗長最小項1以外はEPIのCとABに従属するゆえに，F_σ=C+AB+（1）　従ってFの最小和は，F=C+AB　となる。

Ⅵ　サイクリック関数の取扱いについて

サイクリック関数とは必須最小項を持たない関数である。このような関数は必須最小項を持たないから，これまでのEPI発生操作を直接にこの関数に適用することはできない。特別な工夫が必要である。今，原関数Fから生じたEPIとRPIがあると仮定すると，EPIの発生に際し留保された最小項のセットDがあり，RPIの発生に際しての残りの最小項のセットGがある。もしDに必須最小項がなければFはサイクリックであり，Gに必須最小項がなければGの最小項を持つ関数がサイクリックである。サイクリック関数の最小和を発生するためには次の試行段階が必要である。

ステップ1：　目的の最小和中の考え得る最少数のSEC　EPIの数を目標値として決定する。この目標値をMと呼ぶことにする。

ステップ2：　SEC　EPIになりそうな1個のRPIを撰ぶ。

これらのステップをより詳細に述べると次のようになる。

（ステップ1）　サイクリック関数においては実際の最小和のPI数は直接には予想し得ないので，可能な限りの最小和の色々異なる計算をすることが必要かも知れない。しかしMは最小和での考え得る最小数のSEC　EPIであるから，実際の計算ではSEC　EPIの数ではMより少ないことはあり得ない。もし計算してみてMが達成不可能な値ならば新しい目標値としてM+1，M+2，等を撰ぶとよい。そしてそれらの値の実現可能な場合を調べてみるとよい。

mを原サイクリック関数の最小項の数とする。そしてnを1つのRPIに従属する最多の最小項の数とする。1）もしもm/nが整数ならばM=m/nである。m/nが整数であるということは原関数の最小項は各々どれかのSEC　EPIに1回だけ従属することを意味する。2）もしm/nが整数でない時は，Mの値はM=〔m/n〕+1となる。rをm/nの剰余とすればn−r個の最小項がSEC　EPIに1回以上現れることになる。たとえば，m=14，n=4とする。M=〔14/4〕+1=4でr=2，n−r=2。撰ばれたSEC　EPI中には2個の最小項がくり返し使用されている。3）もしも，最大数の最小項をもつRPIの数が〔m/n〕より少ない時は，その数をN1とせよ。そしてn個の最小項をもつ，このN1個のRPIの全最小項数を与えられたm個の最小項数から差引きm1とし，m1=m−N1＊nとす

る。残る最小項数ｍ１は，１つのRPIに含まれる２番目に最大数の最小項の数ｎ１に関連して考慮される。かくして，Ｍ１＝ｍ１/ｎ１又は〔ｍ１/ｎ１〕＋１となり，Ｍ＝Ｎ１＋Ｍ１となる。もしもｎ１個の最小項をもつRPI数が〔ｍ１/ｎ１〕よりも少ならば，上述のＭでの同様な操作がくり返されねばならない。

（ステップ２） Ｍが計算された後に１つのRPIがSEC EPIとして撰ばれねばならない。この撰択のプロセスは次のように行われる。１）セットＧでの最多の最小項をもつRPIを撰ぶ。もしこのような項が２個以上あるならば最少の文字数をもつ項を撰ぶ。２）もしこのようなRPIがそれでも２個以上あるならば，最少の数のRPIに従属する最小項に注目する。（通例は２個のRPIからであるが）何故ならば，そのようなRPIは必然的にSEC EPIになり得るからである。次の例題はステップ１と２の使用状態を示す。

例題５： Ｆ（Ｖ，Ｗ，Ｘ，Ｙ，Ｚ）＝（０，２，３，４，５，８，９，11，13，14，16，17，20，22，25，26，28，30）

最小項14，22，26はＦの必須最小項であるからＦのEPIは，WXY$\bar{Z}$（14，30），VX$\bar{Z}$（20，22，28，30），VWY$\bar{Z}$（26，30）であり，Ｄ＝（14，20，22，26，28，30） 従ってＧ＝（０，２，３，４，５，８，９，11，13，16，17，25）となる。第２表参照のこと。又，ＦのRPIは次のようになる。

表２ 例題５の最小項と発生主項の表

最　小　項	発　生　主　項	最　小　項	発　生　主　項
$\bar{V}\bar{W}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ （０）	$\bar{V}\bar{W}\bar{X}\bar{Z}$　$\bar{V}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$　$\bar{W}\bar{Y}\bar{Z}$	○$\bar{V}WXY\bar{Z}$ （14）	○$WXY\bar{Z}$
$\bar{V}\bar{W}\bar{X}Y\bar{Z}$ （２）	$\bar{V}\bar{W}\bar{X}Y$　$\cancel{\bar{V}\bar{W}\bar{X}\bar{Z}}$	$V\bar{W}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ （16）	$V\bar{W}\bar{X}\bar{Y}$　$\cancel{\bar{W}\bar{Y}\bar{Z}}$
$\bar{V}\bar{W}\bar{X}YZ$ （３）	$\cancel{\bar{V}\bar{W}\bar{X}Y}$　$\bar{V}\bar{X}YZ$	$V\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z$ （17）	$\cancel{V\bar{W}\bar{X}\bar{Y}}$　$V\bar{X}\bar{Y}Z$
$\bar{V}\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}$ （４）	$\bar{V}\bar{W}X\bar{Y}$　$\cancel{\bar{W}\bar{Y}\bar{Z}}$	~~$V\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}$ （20）~~	
$\bar{V}\bar{W}X\bar{Y}Z$ （５）	$\cancel{\bar{V}\bar{W}X\bar{Y}}$　$\bar{V}X\bar{Y}Z$	○$V\bar{W}XY\bar{Z}$ （22）	○$VX\bar{Z}$
$\bar{V}W\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ （８）	$\bar{V}W\bar{X}\bar{Y}$　$\cancel{\bar{V}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}}$	$VW\bar{X}\bar{Y}Z$ （25）	$\cancel{V\bar{X}\bar{Y}Z}$　$\cancel{W\bar{X}\bar{Y}Z}$
$\bar{V}W\bar{X}\bar{Y}Z$ （９）	$\cancel{\bar{V}W\bar{X}\bar{Y}}$　$\bar{V}W\bar{X}Z$　$\bar{V}W\bar{Y}Z$　$W\bar{X}\bar{Y}Z$	○$VW\bar{X}Y\bar{Z}$ （26）	○$VWY\bar{Z}$
$\bar{V}W\bar{X}YZ$ （11）	$\cancel{\bar{V}W\bar{X}Z}$　$\cancel{\bar{V}\bar{X}YZ}$	~~$VWX\bar{Y}\bar{Z}$ （28）~~	
$\bar{V}WX\bar{Y}Z$ （13）	$\cancel{\bar{V}W\bar{Y}Z}$　$\cancel{\bar{V}X\bar{Y}Z}$	~~$VWXY\bar{Z}$ （30）~~	

Ｒ１ $\bar{V}\bar{W}\bar{X}\bar{Z}$（０，２），Ｒ２ $\bar{V}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$（０，８），Ｒ３ $\bar{W}\bar{Y}\bar{Z}$（０，４，16，$\underline{20}$），Ｒ４ $\bar{V}\bar{W}\bar{X}Y$（２，３），Ｒ５ $\bar{V}\bar{X}YZ$（３，11），Ｒ６ $\bar{V}\bar{W}X\bar{Y}$（４，５），Ｒ７ $\bar{V}X\bar{Y}Z$（５，13），Ｒ８ $\bar{V}W\bar{X}\bar{Y}$（８，９），Ｒ９ $\bar{V}W\bar{X}Z$（９，11），Ｒ10 $\bar{V}W\bar{Y}Z$（９，13），Ｒ11 $W\bar{X}\bar{Y}Z$（９，25），Ｒ12 $V\bar{W}\bar{X}\bar{Y}$（16，17），Ｒ13 $V\bar{X}\bar{Y}Z$（17，25）

Ｇには必須最小項はない。ゆえにＧの最小項からなる関数はサイクリックである。またＲ３の最小項20の下線は既にセットＤに現れた使用済みであってＧに含まれない最小項であることを意味する。次に目標値Ｍを計算する。Ｇではｍ＝12，ｎ＝３であって只一個のRPI，Ｒ３がＧの３個の最小項を持つ。故にＮ１＝１で，〔ｍ/ｎ〕＝４＞Ｎ１であるからｍ１＝12－１×３＝９。RPIにおけるＧの最小項数の２番目に多い数はｎ１＝２である。したがっ

てＭ１＝〔９/２〕＋１＝５であるからＭ＝Ｎ１＋Ｍ１＝１＋５＝６となる。又，ｒ＝１だからｎ１－ｒ＝１，したがって１個の最小項が２個のSEC　EPIに現われることになる。

Ｒ３はＧの３個の最小項をカバーするRPI故にSEC　EPIとして撰ばれて，その最小項０，４，16が留保されるから，前と同様に残る12個のRPI中の最小項で同値の値には下線が施され，以後除外されて考えられる。新しいＧのセットはＧ１＝（２，３，５，８，９，11，13，17，25）となる。次にＲ１，Ｒ２，Ｒ６，Ｒ12はＲ４，Ｒ８，Ｒ７，Ｒ13によって支配されるから破棄される。Ｒ１，Ｒ２，Ｒ６，Ｒ12の除去により最小項２，５，８，17が必須となるゆえにＲ４，Ｒ７，Ｒ８，Ｒ13がSEC　EPIとなる。これらSEC　EPIの最小項が留保された時，Ｇ１に残る未使用の最小項は11だけなのでＲ５かＲ９がSEC　EPIとして撰ばれる。したがってSEC　EPIの数は６個となり目標値Ｍ＝６は達成され，Ｆの最小和は３個のEPIと６個のSEC　EPIの和として示される。また，Ｒ５またはＲ９をSEC　EPIに撰ぶかにより最小項３又は９がSEC　EPI中に二度現れる。

この例題は目標値Ｍが達成された場合を扱っているが次の例題はＭが達成されない場合の例を取扱っている。

例題６：　Ｆ（Ｖ，Ｗ，Ｘ，Ｙ，Ｚ）＝（０，１，２，４，５，６，７，８，９，11，13，14，15，16，18，19，20，21，23，24，25，26，27，28，29，30）

表３　例題６において発生せる冗長主項

Ｒ１	$VW\overline{Z}$ (24, 26, 28, 30)	Ｒ14	$V\overline{X}\overline{Z}$ (16, 18, 24, 26)
Ｒ２	$VW\overline{Y}$ (24, 25, 28, 29)	Ｒ15	$W\overline{X}\overline{Y}$ (8, 9, 24, 25)
Ｒ３	$VW\overline{X}$ (24, 25, 26, 27)	Ｒ16	$\overline{W}X\overline{Y}$ (4, 5, 20, 21)
Ｒ４	$VX\overline{Y}$ (20, 21, 28, 29)	Ｒ17	$\overline{V}\overline{W}X$ (4, 5, 6, 7)
Ｒ５	$V\overline{X}Y$ (18, 19, 26, 27)	Ｒ18	$\overline{V}\overline{Y}Z$ (1, 5, 9, 13)
Ｒ６	$W\overline{Y}Z$ (9, 13, 25, 29)	Ｒ19	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ (0, 8, 16, 24)
Ｒ７	$W\overline{X}Z$ (9, 11, 25, 27)	Ｒ20	$\overline{W}\overline{Y}\overline{Z}$ (0, 4, 16, 20)
Ｒ８	$\overline{V}WZ$ (9, 11, 13, 15)	Ｒ21	$\overline{W}\overline{X}\overline{Z}$ (0, 2, 16, 18)
Ｒ９	$\overline{V}XY$ (6, 7, 14, 15)	Ｒ22	$\overline{V}\overline{W}\overline{Z}$ (0, 2, 4, 6)
Ｒ10	$X\overline{Y}Z$ (5, 13, 21, 29)	Ｒ23	$\overline{V}\overline{X}\overline{Y}$ (0, 1, 8, 9)
Ｒ11	$\overline{W}XZ$ (5, 7, 21, 23)	Ｒ24	$\overline{V}\overline{W}\overline{Y}$ (0, 1, 4, 5)
Ｒ12	$\overline{V}XZ$ (5, 7, 13, 15)	Ｒ25	$V\overline{W}YZ$ (19, 23)
Ｒ13	$V\overline{Y}\overline{Z}$ (16, 20, 24, 28)	Ｒ26	$WXY\overline{Z}$ (14, 30)

Ｆは必須最小項を持たないサイクリック関数である。26個のRPIは表３に示される。ｍ＝26，ｎ＝４で〔26/４〕≯Ｎ１＝24であるからＭ＝〔26/４〕＋１＝７で，ｎ－ｒ＝２であるので，ある最小項が２個以上現れる条件となる。次にSEC　EPIとして１個のRPIを撰び出すが，ステップ２の１）によって最多の最小項４個をもつRPIが24個もあり，１）による仮定のみでは不能ゆえ２）により２個の最少従属度をもつ最小項を撰ぶと最小項は２，11，14，19，23，30であって，その従属されるRPIはＲ１，５，７，８，９，11……であるので，今，Ｒ１（24，26，28，30）をSEC　EPIに仮定する。

前例題と同様の手続きにしたがって

① R 1の最小項（24, 26, 28, 30）と同値の他項の最小項に下線してDに留保す。

② R 2, R 3, R 13, R 14, R 26はR 6, R 7, R 20, R 21, R 9に支配されるゆえに破棄する。

③ 最小項14は必須となる故R 9がSEC EPIとなる。

④ R 9の最小項（6, 7, 15）と同値の他項の最小項に下線を引きDに留保する。

⑤ R 12, R 17はR 10, R 16に支配されるゆえ破棄する。

⑥ 残るGの関数は再びサイクリックとなるゆえ, SEC EPIを又仮定せねばならぬが, Gの最小項の数が4個で最多であり，かつ2個の項にのみ従属する最小項11と27の2個を持ちステップ2の1）と2）に合致することによりR 7をSEC EPIに指定する。

上述のごときプロセスを繰り返してSEC EPIを撰び出すとR 1, R 9, R 7, R 21, R 23, R 25, R 10, R 16の8個のSEC EPIを最小和として撰出できる。他に幾通りかの8個のSEC EPIにより最小和を得るが目標値のMでなくM＋1である。このMが実現しない理由は, R 25又はR 26（この項は2個の最小項を持つにすぎない）が必ずSEC EPIとして入るために，すべて4個の最小項を持つRPIとする仮定の下でのMの値が成立せず，従って2個でなく4個の最小項が2度づつSEC EPIに現われている。

Ⅶ おわりに

今回提案した方法は次のような独得な特徴を持っている。

① 文字法による最小項の表示はブール関数の最小和の発生に至る代数的なアプローチを処理可能とした。

② 代数的な従属や包含への便利な処理を与えるために数個の定理が開発された。

③ 一度使用された最小項の留保や項の支配のような性質は計算のスピードや効率を上げるために用いられている。これらの数え上げた特徴は重複した計算の必要性を減らすのに役立っている。

表4 コンピュータにて解法せる関連問題のデータ

	Number of Literals 5	Number of Literals 8	Number of Literals 12	Number of Literals 15
Numbers of Minterms	Min. 10 Max. 28 Ave. 17.6	Min. 73 Max. 210 Ave. 152.1	Min. 153 Max. 891 Ave. 445	Min. 468 Max. 1723 Ave. 1035.7
Numbers of Derived PIs	Min. 6 Max. 16 Ave. 10.4	Min. 71 Max. 324 Ave. 167.6	Min. 148 Max. 1532 Ave. 602	Min. 454 Max. 2755 Ave. 1392.8
Numbers of PIs in A Minimal Set	Min. 5 Max. 9 Ave. 7.1	Min. 20 Max. 39 Ave. 32.3	Min. 60 Max. 237 Ave. 132.1	Min. 168 Max. 601 Ave. 369.2
C. P. U. Time	Min. 0.19″ Max. 0.22″ Ave. 0.20″	Min. 0.41″ Max. 4.30″ Ave. 2.60″	Min. 1.42″ Max. 2′28.26″ Ave. 37.22″	Min. 16.20″ Max. 9′32.45″ Ave. 2′11.34″

この方法のコンピュータ・プログラムによる計算実行はフオートラン言語を用いてハイタック200 H を使って行われた。このプログラムは5変数から15変数までの約120題程のブール関数の最小和を発生するために使用された。第4表は，そのコンピュータによる最小和発生のデータを示している。

謝 辞

本稿は原文は英文で書かれたが，筆者は，米国バージニア州，ウイリアムスバーグのH・アレン　カーチス氏に対し，この論文の研究と執筆の間に寄せられた彼の絶間ない指導と激励に対して，深甚なる感謝の念を表するものである。

参 考 文 献

1） W. V. Quine : A way to simplify truth functions. Amer. Math. Vol. 62
2） E. J. McCluskey, Jr : Minimization of Boolean Functions. B. S. T. J. Vol. 35
3） H. Allen Curtis : Adjacency Table Method of Derivation Minimal Sums. I. E. E. E. Trans on Comp. Vol C−26
4） J. R. Slagle et al : A New Algorithm for Generating Prime Implicants. I. E. E. E. Trans. on Comp. Vol C−19
5） T. Rhyne et al : A New Technique for the Fast Minimization of Switching Functions. I. E. E. E. Trans. on Comp. Vol C−26
6） A. H. Scheinman : A Method for Simplifying Boolean Functions B. S. T. J. Vol. 41
7） N. N. Biswas : Minimization of Boolean Functions I. E. E. E. Trans. on Comp. Vol. C−20
8） G. Caruso : A Local Selection Algorithm for Switching Function Minimization. I. E. E. E. Trans. on Comp. Vol. C−33

（1987・9・18）